Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2017.105

LUẬT SỐ LỚN CHO BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN TRONG TRƯỜNG HỢP MỘT CHIỀU

Lâm Hoàng Chương, Lê Nguyễn Thúy Vân và Dương Thị Tuyền
Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 05/04/2017
Ngày nhận bài sửa: 29/06/2017
Ngày duyệt đăng: 30/10/2017

Title:
Law of large numbers for random walk in one dimension case

Từ khóa:
Bước đi ngẫu nhiên, định lý giới hạn trung tâm, luật số lớn, tốc độ hội tụ

Keywords:
Central limit theorem, law of large numbers, random walk, rate of convergence

ABSTRACT

The main aim of this paper is to study the model of random walk with state space $\mathbb{Z}$. The method of moments is here used, as in Depauw et al.'s paper (2009), to prove that this random walk converges in probability to a constant (Theorem 1.2) and give its rate also (Theorem 3.1). More precisely, with P be the corresponding Markov operator of the previous random walk and a given function f, we solve the Poisson equation $(P-I)g = f$ and then treat the limits of its solutions, the rate of the convergence is instantly given by the convergence of the moment of random walk.

TÓM TẮT

Mục tiêu chính của bài báo này là nghiên cứu mô hình bước đi ngẫu nhiên với không gian trạng thái là tập $\mathbb{Z}$. Ở đây, phương pháp moment được sử dụng như trong bài báo của Depauw et al. (2009) để chứng minh sự hội tụ theo xác suất đến một hằng số của bước đi đang xét (Định lý 1.2) và đưa ra tốc độ hội tụ của nó (Định lý 3.1). Chi tiết hơn, với P là toán tử Markov tương ứng với bước đi ngẫu nhiên đang xét và hàm f cho trước, ta giải phương trình Poisson $(P-I)g = f$ rồi sau đó tìm giới hạn liên quan đến nghiệm của nó, khi đó tốc độ hội tụ sẽ được cho bởi sự hội tụ của các moment.

Trích dẫn: Lâm Hoàng Chương, Lê Nguyễn Thúy Vân và Dương Thị Tuyền, 2017. Luật số lớn cho bước đi ngẫu nhiên trong trường hợp một chiều. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 52a: 17-21.

1 GIỚI THIỆU

Ta xét một bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ trên $\mathbb{Z}$ có cường độ dịch chuyển sang phải 1 đơn vị là α hoặc sang trái 1 đơn vị là β. Khi đó, xác suất chuyển của nó tại vị trí bất kỳ $k \in \mathbb{Z}$ ở thời điểm $n\geq 0$ được cho bởi các biểu thức sau:

$$\mathbb{P}\{X_{n+1}=k+1|X_n=k\}=\alpha/(\alpha+\beta),$$
$$\mathbb{P}\{X_{n+1}=k-1|X_n=k\}=\beta/(\alpha+\beta). \qquad (1.1)$$

Toán tử Markov tương ứng với bước đi ngẫu nhiên trên là $f \mapsto Pf$ được xác định bởi

$$Pf(k)=\frac{1}{\alpha+\beta}[\alpha f(k+1)+\beta f(k-1)], \qquad (1.2)$$

với f là hàm đo được, bị chặn trên không gian trạng thái của bước đi là $\mathbb{Z}$. Hay nói cách khác, với mô hình của bước đi đang xét, ta luôn có

$$Pf(X_n)=E[f(X_{n+1})|X_n], \text{ với mọi } n\geq 0.$$

Mô hình bước đi ngẫu nhiên là một quá trình ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong thực tế. Nó là sự tăng thêm và mất đi một cá thể sau một thời điểm của quần thể nào đó, còn được gọi là quá trình sinh và chết trong sinh học nói chung. Trong kinh doanh, nó là sự sinh lợi và thua lỗ một lượng tài sản nhất định sau một "giao dịch". Khi ta xét trong vật lý động lực học, nó là sự "di chuyển" ngẫu nhiên của một chất điểm trên dây dẫn đồng chất. Trong lý thuyết trò chơi, đó là sự thắng và thua cuộc với xác suất tùy ý... Tất cả các mô hình áp dụng trên đều được xuất phát từ bài toán nói về sự di chuyển ngẫu nhiên của một *người say rượu* mà không còn khả năng phán đoán đường đi của mình.

Trong mô hình đang xét, nếu cường độ dịch chuyển sang phải và sang trái là như nhau, tức là $\alpha=\beta$, thì ta được bước đi ngẫu nhiên cân bằng như trong Lâm Hoàng Chương *và ctv.* (2016). Khi đó, mọi trạng thái của nó đều hồi quy, tức là nếu xuất phát từ một trạng thái ban đầu thì gần như chắc chắn quá trình sẽ quay lại trạng thái ban đầu đó. Về mặt toán học, ta luôn chứng minh được

$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n=k|X_0=k)=+\infty$, với mọi trạng thái ban đầu $k \in \mathbb{Z}$. Kết quả này đã được đề cập trong tài liệu của Norris (1998) và Ross (2010). Điều đó giải thích lý do tại sao sớm muộn gì thì các quần thể có cùng mô hình sẽ bị "tuyệt chủng", nhà kinh doanh sau một thời gian sẽ phá sản hay người chơi cờ bạc rồi cũng sẽ "nhẵn túi"… Ngoài ra, khi ta áp dụng phương pháp tương tự trong bài báo của Lam Hoang Chuong (2014) thì dãy các biến X_n sẽ thỏa định lí giới hạn trung tâm như trong Lâm Hoàng Chương *và ctv.*, (2016).

Định lí 1.1 (Lâm Hoàng Chương *và ctv.*, 2016) *Với mọi bước đi ngẫu nhiên cân bằng* $(X_n)_{n\geq 0}$, *ta luôn có* $\frac{X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0,1)$ khi $n \to +\infty$. Trong biểu thức trên, $\xrightarrow{D}$ ký hiệu cho hội tụ theo phân phối của các biến ngẫu nhiên.

Bài báo này xét mô hình của một bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ không cân bằng trên $\mathbb{Z}$, tức là $\alpha\neq\beta$, mà có trạng thái ban đầu $X_0=0$. Trong trường hợp này, mọi trạng thái của bước đi sẽ không hồi quy: nếu $\alpha>\beta$ thì nó có khuynh hướng dịch chuyển sang phải và ngược lại nếu $\alpha<\beta$ thì nó có khuynh hướng dịch chuyển sang trái. Khi đó, một dạng luật số lớn cho dãy $(X_n)_{n\geq 0}$ sẽ được chỉ ra như sau:

Định lý 1.2 Với mọi bước đi ngẫu nhiên không cân bằng $(X_n)_{n\geq 0}$ như trên, ta luôn có

$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} G$, khi $n \to +\infty$. Trong biểu thức trên, $\xrightarrow{P}$ ký hiệu cho hội tụ theo xác suất của các biến ngẫu nhiên và $G=(\alpha-\beta)/(\alpha+\beta)$ là hằng số giới hạn.

Đây còn được gọi là luật số lớn cho dãy $(X_n)_{n\geq 0}$. Hơn nữa, mục tiêu chính của bài báo này không chỉ chứng minh Định lý 1.2 mà còn đưa ra tốc độ hội tụ cho nó.

Cấu trúc của bài báo được sắp xếp như sau: Mục 2 trình bày phương pháp chứng minh được sử dụng trong bài báo; kết quả chính về tốc độ hội tụ cho Định lý 1.2 và chứng minh chi tiết của nó được đưa ra ở Mục 3; Mục 4 phân tích và đưa ra mối liên hệ giữa mô hình cân bằng và không cân bằng của bước đi ngẫu nhiên; cuối cùng là phần kết luận vấn đề ở Mục 5.

2 PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Ta bắt đầu với bổ đề sau:

Bổ đề 2.1 Cho $(Z_n)_{n\geq 1}$ là các biến ngẫu nhiên cùng xác định trên một không gian xác suất và hằng số $a \in \mathbb{R}$. Nếu $\lim_{n\to\infty} E(Z_n^\ell) = a^\ell$ với mọi $\ell = 1,2$ thì Z_n hội tụ theo xác suất đến a khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev thì với mọi $\varepsilon > 0$

$$P(|Z_n - a| > \varepsilon) = P((Z_n - a)^2 > \varepsilon^2)$$
$$\leq \frac{E[(Z_n - a)^2]}{\varepsilon^2}$$
$$= \frac{E(Z_n^2) - 2aE(Z_n) + E(a^2)}{\varepsilon^2} \to 0$$

khi $n \to \infty$. Ta được điều phải chứng minh.

Trong phần tiếp theo, ta sẽ dùng ký hiệu $\aleph$ là tập hợp các biến ngẫu nhiên mà có moment bậc hai của nó hữu hạn. Ta định nghĩa một ánh xạ $d: \aleph \times \mathbb{R} \to [0; +\infty]$ sao cho

$$d(X, a) = |E(X - a)| + |E(X^2 - a^2)|. \quad (2.1)$$

Ta có bổ đề sau: **Bổ đề 2.2** Cho $(Z_n)_{n\geq 1}$ thuộc tập $\aleph$ và hằng số $a \in \mathbb{R}$. Nếu $\lim_{n\to\infty} d(Z_n, a) = 0$ thì Z_n hội tụ theo xác suất đến a khi $n \to \infty$.

Chứng minh. Từ công thức (2.1) ta có $d(Z_n, a) = |E(Z_n - a)| + |E(Z_n^2 - a^2)|$. Áp dụng giả thiết của bổ đề $\lim_{n\to\infty} d(Z_n, a) = 0$ suy ra $\lim_{n\to\infty} E(Z_n^\ell) = a^\ell$ với mọi $\ell = 1,2$. Theo Bổ đề 2.1 ta được kết luận của Bổ đề 2.2.

Trong phần tiếp theo ta sẽ sử dụng ánh xạ d và Bổ đề 2.2 để tìm tốc độ hội tụ trong Định lý 1.2 với $Z_n = X_n / n$ và $a = G$.

3 KẾT QUẢ THỰC HIỆN

Với mô hình bước đi ngẫu nhiên không cân bằng như đã giới thiệu ở Mục 1, ta có kết quả chính về tốc độ hội tụ của luật số lớn được trình bày như sau:

Định lý 3.1 Với dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ như trên, ta có

$$d\left(\frac{X_n}{n}, G\right) = O(n^{-1}).$$

Ở đây, ta nhắc lại rằng một hàm $f(n) = O(g(n))$ nếu như $\limsup_{n\to\infty} |f(n)\ /\ g(n)\ | < \infty$.

Về luật số lớn, trường hợp đơn giản nhất như ta đã biết là khi các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối (i.i.d) thì nó có cả hai dạng: luật yếu và luật mạnh số lớn. Trong mô hình ta đang xét thì bước đi ngẫu nhiên là một xích Markov tổng quát hơn trường hợp i.i.d, là một dạng các biến phụ thuộc và cũng cho ta biết thêm về tốc độ hội tụ của nó.

Trong phần chứng minh ta sẽ xét trường hợp $\alpha > \beta$, với trường hợp $\alpha < \beta$ ta cũng có thì cách làm tương tự. Ta có các bổ đề cơ bản nhưng rất hữu ích sau:

Bổ đề 3.1 Với một hàm $\varphi: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ cho trước, sẽ tồn tại duy nhất một hàm $\Phi: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{cases}(P-I)\Phi \equiv \varphi \\ \ \Phi(0) = 0.\end{cases} \tag{3.1}$$

Chứng minh. Ta có $(P-I)\Phi(0) = \varphi(0)$ suy ra

$$\Phi(-1) + \Phi(1) - 2\Phi(0) = 2\varphi(0).$$

Từ đó ta xác định được $\phi(0)$.

Với $m \geq 1$, ta xét $(P-I)\Phi(m) = \varphi(m)$. Nó tương đương với

$$\Phi(m+1) - \Phi(m) = \frac{\beta}{\alpha}[\Phi(m) - \Phi(m-1)] + \frac{\alpha+\beta}{\alpha}\varphi(m)$$

và bằng cách tính đệ quy theo m, ta được

$$\Phi(m) = \gamma \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \varphi(l-k)$$

trong đó $\gamma = (\alpha+\beta)/\alpha,\ \rho = \beta/\alpha$.

Tương tự, với $m \leq -1$ ta có

$$\Phi(m) = -\gamma \sum_{l=2}^{-m+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \varphi(1-l-k)$$

Như vậy, ta đã chứng minh được rằng Φ là một nghiệm duy nhất của (3.2).

Trở lại định lý 3.1, ta phân tích

$$d\left(\frac{X_n}{n}, G\right) = \left|E\left(\frac{X_n}{n} - G\right)\right| + \left|E\left(\left(\frac{X_n}{n}\right)^2 - G^2\right)\right|.$$

Ta lưu ý rằng, với các giá trị γ *và* ρ vừa giới thiệu thì $G = \frac{1-\rho}{\gamma}$. Từ đó, để chứng minh định lý 3.1 ta cần chỉ ra $E\left(\frac{X_n}{n} - G\right) = O(n^{-1})$ và $E\left(\left(\frac{X_n}{n}\right)^2 - G^2\right) = O(n^{-2})$ thông qua hai mệnh đề 3.1 và 3.2 bên dưới.

Mệnh đề 3.1 Với dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ như trên, ta có

$$E\left(\left(\frac{X_n}{n}\right)^2 - G^2\right) = O(n^{-2}).$$

Chứng minh. Ta xét một dãy các hàm $f_k \geq 0$, xác định trên $\mathbb{Z}$, sao cho

$$\begin{cases}(P-I)f_k \equiv f_{k-1}, & k \geq 1 \\ f_0 \equiv 1, & \\ f_k(0) = 0, & k \geq 1.\end{cases}$$

Áp dụng Bổ đề 3.1 với $\varphi \equiv f_0$, $\Phi \equiv f_1$ ta được

Với $m \geq 1$

$$f_1(m) = \gamma \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k f_0(l-k) = \gamma \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = \gamma \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{1-\rho} = \frac{m\gamma}{1-\rho}.$$

Với $m \leq -1$

$$f_1(m) = -\gamma \sum_{l=2}^{-m+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k f_0(1-l-k) = -\gamma \sum_{l=2}^{-m+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k = \frac{m\gamma}{1-\rho}.$$

Vậy ta được

$$f_1(m) = \frac{m\gamma}{1-\rho}$$

với mọi m.

Tiếp tục áp dụng Bổ đề 3.1 với $\varphi \equiv f_1$, $\Phi \equiv f_2$ ta cũng được

Với $m \geq 1$

$$f_2(m) = \gamma \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k f_1(l-k)$$

$$= \frac{\gamma^2}{1-\rho} \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k (l-k)$$

$$= \frac{\gamma^2}{1-\rho} \sum_{l=0}^{m-1} \left(\frac{l}{1-\rho} - \rho \sum_{k=0}^{+\infty} k.\rho^{k-1} \right)$$

$$= \frac{\gamma^2}{1-\rho} \left(\frac{(m-1)m}{2(1-\rho)} - \frac{m\rho}{(1-\rho)^2} \right)$$

$$= \frac{\gamma^2}{(1-\rho)^2} \left(\frac{(m-1)m}{2} - \frac{m\rho}{(1-\rho)} \right).$$

Với $m \leq -1$, thực hiện tương tự ta cũng có kết quả như trên.

Vậy ta được

$$f_2(m) = \frac{\gamma^2}{(1-\rho)^2} \left(\frac{(m-1)m}{2} - \frac{m\rho}{(1-\rho)} \right)$$

với mọi m.

Khi đó, với mọi số nguyên m và với $k \geq 1$ ta có $(P-I) f_k(m) = f_{k-1}(m)$.

Thay thế m bởi X_n và lấy kỳ vọng ta được

$E\{f_k(X_{n+1})\} = E\{f_k(X_n)\} + E\{f_{k-1}(X_n)\}$ với mọi $n \geq 0$. Từ đó dẫn đến với mỗi $k = \overline{1,2}$ thì

$$E\{f_k(X_n)\} = \frac{(n-1)^{k-1} n}{k} \qquad (3.2)$$

vì $f_k(0) = 0$ theo định nghĩa của f_k và $X_0 = 0$ theo giả thiết của bước đi ngẫu nhiên X_n. Biểu thức (3.2) được chứng minh bằng cách tính đệ quy theo k.

Đặc biệt, trong trường hợp $k = 2$ ta có

$$E\{f_2(X_n)\} = \frac{(n-1)n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$$

khi *n* đủ lớn. Biểu thức (3.2) có thể viết lại một cách hình thức như sau:

$$E\left\{ \frac{f_k(X_n)}{X_n^k} \times \frac{X_n^k}{n^k} \right\} \sim \frac{1}{k}$$

khi *n* đủ lớn.

Ta sẽ thấy rằng $\lim_{m\to\infty} f_k(m)/m^k$ tồn tại và từ đó dẫn đến giới hạn của $E\{X_n^k/n^k\}$ cũng tồn tại. Bước tiếp theo, ta sẽ tính giới hạn của $\lim_{m\to\infty} f_k(m)/m^k$.

Bổ đề 3.2 Cho $k = \overline{1,2}$, với hàm f_k được định nghĩa như trên thì

$$\lim_{m\to\pm\infty} \frac{f_k(m)}{m^k} = \frac{1}{k} \left(\frac{\gamma}{1-\rho} \right)^k. \qquad (3.3)$$

Chứng minh. Ta có

Với $k = 1$: $\lim_{m\to\pm\infty} \frac{f_1(m)}{m} = \lim_{m\to\pm\infty} \frac{m\gamma}{m(1-\rho)} = \frac{\gamma}{1-\rho}$.

Với $k = 2$: $\lim_{m\to\pm\infty} \frac{f_2(m)}{m^2} = \lim_{m\to\pm\infty} \frac{\gamma^2}{m^2(1-\rho)^2} \left(\frac{(m-1)m}{2} - \frac{m\rho}{1-\rho} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{1-\rho} \right)^2$.

Vậy ta được điều phải chứng minh.

Từ Bổ đề 3.2, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $m \geq M$ thì ta có

$$\left| \frac{m^2}{f_2(m)} - 2G^2 \right| < \epsilon.$$

Ta nhắc lại rằng $G = \frac{1-\rho}{\gamma}$. Khi đó

Nếu $\{|X_n| \geq M\}$ thì

$$\left| E\left(\left(\frac{X_n}{n} \right)^2 - G^2 \right) \right| \approx \left| E\left(\frac{X_n^2}{n^2} - 2G^2 . \frac{f_2(X_n)}{n^2} \right) \right|$$
$$\leq E\left(\left| \frac{X_n^2}{f_2(X_n)} - 2G^2 \right| . \left| \frac{f_2(X_n)}{n^2} \right| \right)$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2}$$

khi *n* đủ lớn.

Nếu $\{|X_n| < M\}$ thì

$$\left| E\left(\left(\frac{X_n}{n} \right)^2 - G^2 \right) \right| \approx \left| E\left(\frac{X_n^2}{n^2} - 2G^2 . \frac{f_2(X_n)}{n^2} \right) \right|$$
$$\leq E\left(\frac{M^2}{n^2} + 2G^2 . \frac{|f_2(X_n)|}{n^2} \right) \leq \frac{D_1}{n^2}$$

khi *n* đủ lớn. Vậy ta được điều phải chứng minh.

Mệnh đề 3.2 Với dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ như trên, ta có

$$E\left(\frac{X_n}{n} - G \right) = O(n^{-1}).$$

Chứng minh. Ta có, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $m \geq N$ thì $\left| \frac{f_1(m)}{m} - \frac{1}{G} \right| < \epsilon$.

Khi đó

Nếu $\{|X_n| \geq N\}$ thì

$$\left|E\left(\frac{X_n}{n} - G\right)\right| = \left|E\left(\frac{X_n}{n} - G.\frac{f_1(X_n)}{n}\right)\right| \leq E\left(\left|\frac{X_n}{n}.G\right|.\left|\frac{1}{G} - \frac{f_1(X_n)}{X_n}\right|\right) \leq \epsilon$$

khi *n* đủ lớn.

Nếu $\{|X_n| < N\}$ thì

$$\left|E\left(\frac{X_n}{n} - G\right)\right| = \left|E\left(\frac{X_n}{n} - G.\frac{f_1(X_n)}{n}\right)\right| \leq E\left(\frac{N}{n} + G.\frac{|f_1(X_n)|}{n}\right) \leq \frac{D_2}{n}$$

khi *n* đủ lớn. Vậy ta được điều phải chứng minh.

4 MỐI LIÊN HỆ GIỮA MÔ HÌNH CÂN BẰNG VÀ MÔ HÌNH KHÔNG CÂN BẰNG

Mục này được dùng để phân tích thêm về mối quan hệ giữa định lý giới hạn trung tâm và luật số lớn của bước đi ngẫu nhiên trong mô hình đang xét. Ta đã thấy rằng khi cường độ dịch chuyển $\alpha = \beta$ thì ta có định lý giới hạn trung tâm, còn khi $\alpha \neq \beta$ thì ta có luật số lớn. Trong trường hợp $\alpha \neq \beta$ ta giả sử $\alpha = t\beta$ với hằng số $t > 0$. Tham số t còn được gọi là nhiễu tác động của mô hình không cân bằng. Khi đó, ta có

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow{P} G = \frac{t\beta - \beta}{t\beta + \beta} = \frac{t-1}{t+1}.$$

Ta đặt giới hạn trên là hàm $G(t) = \frac{t-1}{t+1}$. Xét về mặt vật lý, đây chính là vận tốc di chuyển của bước đi khi n đủ lớn. Nếu $t \to 1$ thì $\alpha \approx \beta$. Khi đó, trạng thái cân bằng của bước đi gần như xảy ra. Ta có các định nghĩa sau:

Định nghĩa 4.1 Trong mô hình bước đi ngẫu nhiên không cân bằng, tức $t \neq 1$, thì độ nhiễu tác động được cho bởi $\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = h(t)$ theo xác suất.

Định nghĩa 4.2 Trong mô hình bước đi ngẫu nhiên cân bằng, tức $t = 1$, thì hệ số khuếch tán được cho bởi

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{X_n^2}{n^2}\right) = \sigma^2.$$

Trong các mô hình ta đang xét thì $h(t) = \frac{t-1}{t+1}$ và $\sigma^2 = 1$.

Định lý sau nói lên mối liên hệ giữa độ nhiễu tác động và hệ số khuếch tán của mô hình trong trường hợp đặc biệt $t = g(\lambda)$ với g là hàm khả vi, liên tục và $g(0) = 1$. Khi đó, $h(t) = \frac{g(\lambda)-1}{g(\lambda)+1} = H(\lambda)$ và $\lambda \to 0$ thì $t \to 1$.

Định lý 4.1 Với hàm $H(\lambda)$ và σ^2được xác định như trên, ta có

$$H'(0) = \sigma^2 = 1$$

nếu hàm g thỏa $g'(0) = 2$.

Chứng minh. Tính trực tiếp đạo hàm của $H(\lambda)$ tại $\lambda = 0$.

Dựa vào lý thuyết động học trong vật lý, ta mô tả Định lý 4.1 như sau: trong sự chuyển động của chất điểm thì đạo hàm của vận tốc di chuyển, hay là đạo hàm độ nhiễu tác động, tại thời điểm cân bằng sẽ bằng với hệ số khuếch tán khi không có độ nhiễu tác động. Đây còn được gọi là "mối quan hệ Einstein" cho bước đi ngẫu nhiên trong trường hợp một chiều.

5 KẾT LUẬN

Bài báo đã đánh giá được tốc độ hội tụ trong luật số lớn cho mô hình bước đi ngẫu nhiên không cân bằng trong một chiều. Ngoài ra, nó cũng đưa ra sự so sánh và mối liên hệ giữa các mô hình cân bằng và không cân bằng. Về tiềm năng, phương pháp trong bài báo này có thể được áp dụng cho nhiều mô hình chuyển động ngẫu nhiên khác tổng quát hơn, thu được nhiều kết quả ý nghĩa hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Depauw, J. and Derrien, J.M., 2009. Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. Comptes Rendus Mathematique, 347(7-8): 401-406.

Lam Hoang Chuong, 2014. A quenched central limit theorem for reversible random walk in random environment on Z. Journal of Applied Probability. 51(4): 1051-1064.

Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba, 2017. Tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên trong một chiều. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 49a: 73-78.

Norris J.R., 1998. Markov chains. Cambridge University Press, 237 pages.

Ross S. M., 2010. Introduction to Probability Models. Elsevier Inc, 782 pages.